LISTA 7 - Różniczka. Pochodne cząstkowe funkcji złożonej. Funkcje uwikłane.

1. Obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia

   (a) $(1.02)^4 \cdot (0,97)^2$, (b) $(1.04)^{2,02}$, (c) $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[3]{0,98} - 1)$.

2. Wyznaczyć pochodną (pochodne cząstkowe) złożenia podanych funkcji

   (a) $f(x,y) = e^{x-2y}, \quad x(t) = \sin t, \quad y(t) = t^3$,
   (b) $f(x,y) = x^2 \ln y, \quad x(u,v) = \frac{u}{v}, \quad y(u,v) = 3u - 2v$,
   (c) $f(x,y) = x^2y - y^2x, \quad x(\varphi, r) = r\cos\varphi, \quad y(\varphi, r) = r\sin\varphi$.

3. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną. Wykazać, że funkcja F spełnia podane równanie różniczkowe

   (a) $F(u,v) = f(u^2 + v^2), \quad v\frac{\partial F}{\partial u} - u\frac{\partial F}{\partial v} = 0$,
   (b) $F(u,v) = \sin u + f(\sin u - \sin v), \quad \frac{\partial F}{\partial v}\cos u + \frac{\partial F}{\partial u}\cos v = \cos u \cos v$.

4. Zbadać, czy w otoczeniu punktu A istnieje funkcja uwikłana $y = f(x)$ dana równaniem, jeśli tak wyznaczyć pochodną tej funkcji

   (a) $x^2 - 2y^2 - 2x - 4y = -4, \ A = (1,1)$,
   (b) $x^3 - y^3 = 0, \ A = (0,0)$,
   (c) $xy - \ln y = 1, \ A = (\frac{2}{e}, e)$,
   (d) $ye^x + e^y = 0, \ A = (-1,-1)$.

5. Napisać (o ile istnieje) równanie stycznej do krzywej w punkcie A

   (a) $x + x^3 = y^3 + y^5, \ A = (1,1)$, (b) $2 + x^3 + y^3 = e^x + e^y, \ A = (0,0)$.

6. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = f(x)$ $(x = g(y))$ danej równaniem

   (a) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x + 1 = 0$,
   (b) $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$,
   (c) * $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$.